II RAPPELS DE RR : PHYSIQUE DE L'E-T PLAT

→ En vertu du PE, la RR est toujours valable localement dans un référentiel approprié (en chute libre).

→ La RR peut se déduire de 2 postulats :

① Principe de relativité (galilée) : toutes les lois de la physique prennent la même forme dans tout les référentiels inertiels

② Universalité de la vitesse de la lumière (Einstein) : la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est isotrope et prend la même valeur dans tout les référentiels inertiels.

2.1 Référentiel inertiel :

→ La RR est une théorie de l'espace-temps plat $\mathbb{R}^{1,3}$ dont les points sont des évènements. Les référentiels permettent de repérer les évènements.

En RR, ils sont constitués de :

① un repère spatial cartésien orthonormé rigide, au repos p/r à l'observateur qui enregistre les évènements, de coordonnées $x^i \doteq (x^1, x^2, x^3)$

② d'horloges, situées en chaque point de l'espace, qui déterminent quand l'évènement a lieu, de coordonnée temporelle $x^0 = ct$

→ On note $x^\mu = (x^0, x^i)$ $[x^\mu] = L$

→ Les évènements sont indépendants du système de coordonnées.

DEF : Le principe d'inertie stipule qu'en absence de force, un corps se meut en ligne droite, sans accélération, ou reste au repos.

DEF : Un référentiel inertiel est un réf. dans lequel le principe d'inertie est vrai.

2.2 Intervalle d'espace-temps

DEF : L'intervalle d'espace-temps entre 2 évènements est définit comme :

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$\triangleq \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad \text{avec } \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Cette définition muni l'e-t d'une structure causale.

ex: si $\Delta s > 0$, alors $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 > 0$

$\Rightarrow (\Delta x/\Delta t)^2 = v^2 > c^2 \rightsquigarrow$ pas de contact causal.

Prop : L'intervalle Δs^2 est invariant sous changement de référentiel intertiel.

$\boxed{\text{DEMO}}$ Soient 2 évènements P et Q séparés par $\begin{cases} \Delta x^\mu & \text{dans } \mathcal{O} \\ \Delta x^{\mu'} & \text{dans } \mathcal{O}' \end{cases}$

→ Supposons qu'un signal lumineux parte de P vers Q.

↳ Dans $\mathcal{O}$: $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + v^2 \Delta t^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = c^2$

↳ Dans $\mathcal{O}'$: $\Delta s'^2 = -c^2\Delta t'^2 + v'^2\Delta t'^2 = 0 \Leftrightarrow v'^2 = c^2$

Alors dans les 2 cas, $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = 0$

→ Si on relie P→Q par la droite $\Delta x^\mu = a^\mu \tau + b^\mu$, il faut que cela reste une droite pour $\mathcal{O}'$: $\Delta x^{\mu'} \overset{!}{=} a^{\mu'}\tau + b^{\mu'}$ (car $\mathcal{O}'$ est inertiel). Les transformations qui préservent cela sont les transfos. projectives : $x'^\mu = \dfrac{\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu x^\nu + \tilde{a}^\mu}{c_\rho \ell^\rho + b}$

↳ On impose que des coord. linéaires dans $\mathcal{O}$ le soient dans $\mathcal{O}'$: $c_\rho = 0$

↳ On impose des transfos inversibles : $d = 1$

On conclu : $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu + a^{\mu'}$

↳ Puisque Δs^2 est quadratique en Δx^μ et que $\Delta s^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s'^2 = 0$, ils doivent être proportionnels : $\Delta s^2 = K \Delta s'^2$

↳ Par isotropie de l'espace, $K(\vec{v}) = K(|\vec{v}|)$. En particulier, $K(\vec{v}) = K(-\vec{v})$

→ $\Delta s^2 = K(v)\Delta s'^2$ et $\Delta s'^2 = K(-v)\Delta s^2 = K(v)K(-v)\Delta s'^2$

$\Rightarrow (K)^2 = 1 \quad \forall v$

↳ Puisque la signature d'une forme quadratique est conservée par une transformation réelle (thm de Sylvester), on déduit $K = +1$ et $\Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad \forall \mathcal{O}, \mathcal{O}'$ inertiels ▨

2.3 Transfo de Lorentz et Poincaré

→ Les transformations de Lorentz inhomogène (aussi appelées transformations de Poincaré) sont celles qui préservent l'élément de longueur.
"Les Λ preserve Δs^2"

→ Soient 2 refs O et O' de coordonnées x^μ et $x^{\mu'}$. On a:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu + a^{\mu'}$$

Alors $\Delta s'^2 = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'}$

$$= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \Delta x^\mu \Delta x^\nu \overset{!}{=} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta s^2$$

↳ Les matrices $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$ doivent satisfaire:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \quad \text{ou encore} \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

En effet, $\Delta s'^2 = \Delta x'^T \eta \Delta x' = \Delta x^T \underline{\Lambda^T \eta \Lambda} \Delta x = \Delta s^2$

DEF | Le groupe de Poincaré $IO(1,3)$ est formé des transformations $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu + a^{\mu'}$ avec $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ et a^μ = constantes

DEF | Dans le cas où $a^\mu = 0$, les transformations forment le groupe de Lorentz homogène $O(1,3)$

Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{1}$, ce sont des translations

→ Remarque: on peut généraliser en définissant le groupe $O(p,q)$ où $\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{-1,-1,\dots,-1}_{p}, \underbrace{1,\dots,1}_{q})$ avec $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

Sous-groupes de $O(1,3)$:

DEF | Les transformations avec $\det \Lambda = +1$ forme le groupe de Lorentz propre $SO(1,3)$

↳ Elle correspondent aux transfo qui l'orientation des axes d'e-t.

↳ $\det(\Lambda \eta \Lambda) = \det(\eta) \Leftrightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \det \Lambda = \pm 1$

$\to \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \, \eta_{\mu\nu} \Rightarrow -1 = \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 \, \eta_{\mu\nu}$

$= -(\Lambda^0{}_0)^2 + \underbrace{\sum_k (\Lambda^k{}_0)^2}_{\geq 0}$

$\to (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq 1$

DEF | Les transformations avec $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ forment le groupe orthochrone des transformations de Lorentz $O(1,3)^\uparrow$

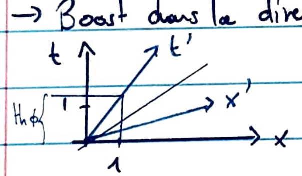
DEF | On définit le groupe de Lorentz propre orthochrone $SO(1,3)^\uparrow$ par : $SO(1,3) \equiv SO(1,3) \cap O(1,3)^\uparrow$

↳ Par abus de langage, on appelle parfois $SO(1,3)^\uparrow$ simplement "groupe de Lorentz".

② Exemples:

→ Rotation autour de z : $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ Boost dans la direction x : $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\phi & -\mathrm{sh}\,\phi & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\,\phi & \mathrm{ch}\,\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $v = \mathrm{th}\,\phi$



→ Dimension : $\dim(O(1,3)) = \frac{n(n-1)}{2} = 6$ (3 rotations, 3 boosts)

$\dim(IO(1,3)) = 4 + 6 = 10$ (ajoute 4 translations)

2.4 Tenseurs d'espace-temps plat

DEF | Soit $\mathcal{M}$ une variété. En tout point $p \in \mathcal{M}$, on définit un espace vectoriel $T_p\mathcal{M}$ qu'on nomme espace tangent à $\mathcal{M}$ en p, avec $\dim(T_p\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{M})$

→ On appelle vecteur les éléments de cet espace tangent

→ Un champ de vecteur est la donnée d'un vecteur $\forall p \in \mathcal{M}$

→ L'ensemble de tout les espaces tangents à $\mathcal{M}$ est appelé le fibré tangent $T\mathcal{M} \equiv \bigcup_p T_p\mathcal{M}$

→ En RR, l'espace temps est plat et $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ où $x^\mu \doteq (t, x^i)$

↳ L'intervalle d'e-t est $\Delta s \triangleq g_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu$

⊙ Vecteurs :

→ Dans tout espace tangent $T_p\mathcal{M}$, on peut choisir une base de l'espace vectoriel $\{\bar{e}_\alpha\}$. On peut alors écrire tout vecteur comme :

$$A = A^\alpha \bar{e}_\alpha$$

→ Exemple : le vecteur tangent à une courbe $\mathcal{C} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathcal{M} \\ \lambda \to x^\mu(\lambda) \end{pmatrix}$. Alors

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

→ Sous une transformation de Lorentz, un vecteur se transforme comme :

$$V^\alpha \mapsto V^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \Rightarrow V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\nu} V^\nu$$

C'est en fait la définition d'un vecteur.

↳ Ses vecteurs de base se transforment selon :

$$V = V^\alpha \underline{\bar{e}_\alpha} = V^{\alpha'} \bar{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\nu} \underline{V^\nu \bar{e}_{\alpha'}} \Rightarrow \bar{e}_\alpha = \Lambda^{\alpha'}{}_{\nu} \bar{e}_{\alpha'}$$

Inversons la relation :

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\nu} x^\nu \Leftrightarrow x^\nu = \Lambda^\nu{}_{\alpha'} x^{\alpha'} \Rightarrow x^\nu = \underline{\Lambda^\nu{}_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}{}_{\sigma}} x^\sigma$$

$$\Rightarrow \bar{e}_{\alpha'} . \Lambda^{\alpha'}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} = \bar{e}_\alpha . \Lambda^\alpha{}_{\beta'} \qquad \bar{e}_{\alpha'} = \Lambda^\nu{}_{\alpha'} \bar{e}_\nu \qquad \delta^\nu_\sigma = \mathbb{1}$$

Les vecteurs de base se transforment avec la transfo de Lorentz inverse de celle des composantes du vecteur

⊙ Covecteurs / 1-formes :

DEF | On définit l'espace cotangent à $\mathcal{M}$ au point p $T^*_p\mathcal{M}$ comme le dual de $T_p\mathcal{M}$, ie l'ensemble des formes linéaires de $T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$:

$\omega \in T^*_p\mathcal{M} \Rightarrow \omega : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R} : V \mapsto \omega(V) \in \mathbb{R}$ tel que

Covecteur

$\omega(aV + bW) = a\,\omega(V) + b\,\omega(W) \in \mathbb{R}$ (linéarité)

→ $T^*_p\mathcal{M}$ est lui-m̂ un espace vectoriel.

Un covecteur "mange" un vecteur pour donner un nombre.

DEF | Tout covecteur peut se décomposer dans une base duale de $T^*_p\mathcal{M}$ définie par $\{\theta^\mu\}$ tel que $\underline{\theta}^\nu(\bar{e}_\mu) = \delta_\mu^\nu$. On a alors :

$$\omega = \omega_\alpha \underline{\theta}^\alpha$$

Prop Les composantes ω_α et V^μ d'un covecteur, vecteur dans une seule base sont suffisantes pour exprimer l'action de ω sur V :

$$\omega(V) = \omega_\alpha \underline{\theta}^\alpha(V^\mu \bar{e}_\mu) = \omega_\alpha V^\mu \underline{\theta}^\alpha(\bar{e}_\mu) = \omega_\alpha V^\alpha$$

Prop Le dual d'un dual peut être identifié à l'espace vectoriel lui-même :

$$V^{**} \simeq V$$

↳ Les vecteur V peuvent également être vus comme des formes linéaires sur $T_p^*\mathcal{M}$, selon :

$$V \in (T_p^*\mathcal{M})^* \Rightarrow V : \begin{pmatrix} T_p^*\mathcal{M} \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto V(\omega) \equiv \omega(V) = \omega_\alpha V^\alpha \end{pmatrix}$$

→ Transformation des composantes d'un covecteur :

$$\omega(V) = \omega_\alpha V^\alpha = \omega_{\alpha'} V^{\alpha'} = \omega_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}{}_\mu V^\mu \Rightarrow \omega_{\rho'} = \Lambda^\mu{}_{\rho'} \omega_\mu$$

↳ Pour les covecteurs de bases : $\underline{\theta}^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \underline{\theta}^\nu$

DEF On définit le *fibré cotangent* comme $T^*\mathcal{M} \equiv \bigcup_p T_p^*\mathcal{M}$

→ L'action d'un champ de covecteurs sur un champ de vecteur définit une fonction sur $\mathcal{M}$.

→ Exemple : le gradient d'une fonction f : $df \,\hat{=}\, \dfrac{\partial f}{\partial x^\mu} \underline{\theta}^\mu$

⊙ Tenseurs :

→ On peut généraliser la notion de vecteurs et covecteurs, qui sont des formes linéaires de $T_p\mathcal{M}$ ou $T_p^*\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi,

$V : T_p^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est un tenseur $(1,0)$ et — # de forme pour obtenir un scalaire

$\omega : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est un tenseur $(0,1)$. — # de vecteur pour obtenir un scalaire

DEF Un tenseur (k,ℓ) est une application multilinéaire

$$\Psi : \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times \cdots \times T_p^*\mathcal{M}}_{k} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times \cdots \times T_p\mathcal{M}}_{\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$$

→ L'ensemble des tenseurs (k,ℓ) forme un espace vectoriel, de base

$\bar{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{\mu_k} \otimes \underline{\theta}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\theta}^{\nu_\ell}$ où $\{\bar{e}_\mu\}$ est la base de $T_p\mathcal{M}$ et

$4^{k+\ell}$ vecteurs de base — $\{\underline{\theta}^\nu\}$ est la base de $T_p^*\mathcal{M}$

DEF | Le produit tensoriel de 2 tenseurs $T(k,l)$, $S(m,n)$ est défini par

$$T\otimes S(\omega_1,\dots,\omega_{k+m},V_1,\dots,V_{l+n}) \hat{=} T(\omega_1,\dots,\omega_k,V_1,\dots,V_l)\,S(\omega_{k+1},\dots,\omega_{k+m},V_{l+1},\dots,V_{l+n})$$

→ Composantes d'un tenseur :

Dans sa base, un tenseur se décompose selon :

$$T = T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\ \bar{e}_{\mu_1}\otimes\dots\otimes\bar{e}_{\mu_k}\otimes\underline{\theta}^{\nu_1}\otimes\dots\otimes\underline{\theta}^{\nu_l}$$

Ses composantes se transforment selon :

$$T^{\mu_1'\dots\mu_k'}{}_{\nu_1'\dots\nu_l'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1}\dots\Lambda^{\mu_k'}{}_{\mu_k}\,\Lambda_{\nu_1'}{}^{\nu_1}\dots\Lambda_{\nu_l'}{}^{\nu_l}\ T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}$$

Prop | Une relation tensorielle vraie dans un référentiel inertiel est vrai dans tout référentiel inertiel

→ Exemple : les équations de Maxwell

On peut écrire $\begin{cases}\bar{\nabla}\times\bar{B}-\partial_t\bar{E}=\bar{J} & ;\ \bar{\nabla}\times\bar{E}+\partial_t B=0 \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\rho/\varepsilon_0 & ;\ \bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0\end{cases}$ en notation

tensorielle : $\begin{cases}\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu & \text{où } F^{\mu\nu}\hat{=}\text{ tenseur de Faraday }=-F^{\nu\mu} \\ \partial_{[\alpha}F_{\mu\nu]}=0 & \text{où } T_{[\mu_1\dots\mu_n]}=\frac{1}{n!}\left(\sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\,T_{\sigma(\mu_1\dots\mu_n)}\right)\end{cases}$

L'invariance des eqs de Maxwell pour les transfo de Lorentz devient explicite : $\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu \rightarrow \Lambda^{\mu'}{}_\mu\partial_{\mu'}(\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'}F^{\alpha'\beta'})=\Lambda^\nu{}_{\gamma'}J^{\gamma'}$

$$\Leftrightarrow \Lambda^\nu{}_{\gamma'}\partial_{\alpha'}F^{\alpha'\gamma'}=\Lambda^\nu{}_{\gamma'}J^{\gamma'} \Leftrightarrow \partial_{\alpha'}F^{\alpha'\beta'}=J^{\beta'}$$

2.5 Métrique Minkowskienne

DEF | La métrique minkowskienne est un tenseur $(0,2)$ de composantes

$$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$$

On le définit par ses composantes car les transfo de Lorentz préservent la métrique.

DEF | La métrique η définit le produit scalaire de 2 vecteurs selon :

$$\eta : \begin{pmatrix} T_p\mathcal{M}\times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (V,W) \mapsto \eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu \end{pmatrix}$$

Prop | 2 vecteurs sont dit orthogonaux si leur produit scalaire est nul

$$V \perp W \quad \text{si} \quad V \cdot W = 0$$

DEF | La norme d'un vecteur définit son genre

$$\|V\|^2 \equiv \eta(V,V) \begin{cases} > 0 & : V \text{ est de genre espace} \\ = 0 & : V \text{ est de genre lumière} \\ < 0 & : V \text{ est de genre temps} \end{cases}$$

→ La métrique inverse est un tenseur (2,0) de composante $\eta^{\mu\nu}$

↳ $\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\nu}$ sont utilisé pour "monter" ou "descendre" le indices, c'est-à-dire de convertir des vecteurs en covecteurs et ↔.

ex: soit V un vecteur de composantes V^α. On définit alors

$$\eta_V : \begin{pmatrix} T_p\mathcal{M} & \longrightarrow & T_p^*\mathcal{M} \\ V & \longmapsto & \eta(V,\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{où } \eta(V,\cdot) : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

Explicitement, $V^\mu \mapsto \eta_{\mu\nu} V^\mu \hat{=} V_\nu$

DEF | L'espace-temps plat muni de la métrique de Minkowski est nommé espace-temps de Minkowski et noté $\mathcal{M}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{1,3}$

Alternativement, on peut le définir de 2 manières:

1. Espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature $(-,+,+,+)$
2. Variété pseudo-Riemanienne de métrique $\eta_{\mu\nu}$

2.6 Structure causale de l'e-t de Minkowski

La finitude de la vitesse de la lumière et le fait que tout signal ait $v \leq c$ donne à l'espace-temps de Minkowski une structure particulière

2.6.1 Cône de lumière: futur et passé d'un évenement

DEF | Soit $P \in \mathcal{M}^{1,3}$ un evenement. On appelle cône de lumière en P C_P l'ensemble des événements qui sont à distance nulle de P

↳ $\Delta s^2 = 0 = -\Delta t^2 + \Delta x^i \Delta x_i \iff \Delta t = \pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

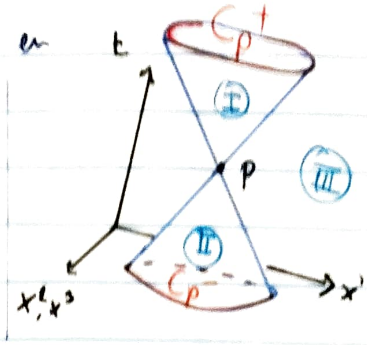
$$C_P \equiv \{ Q \in \mathcal{M}^{1,3} / \Delta s^2(P \to Q) = 0 \}$$

DEF Le cône de lumière en P divise l'espace-temps en 3 régions:

① Le futur absolu de P $\equiv C_P^+$ et son intérieur

② Le passé absolu de P $\equiv C_P^-$ et son intérieur

③ L'ailleurs absolu de P $\equiv$ l'extérieur de C_P



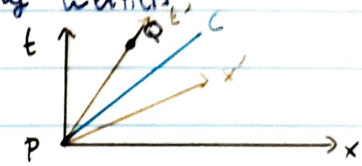
Justification de cette terminologie :

① Si Q $\in$ futur absolu de P, alors :

→ Q se produit après P pour tout les ref inertiels.

→ Si $\Delta s^2_{PQ} < 0$, $\exists\, \mathcal{O}'$ tq $\Delta x' = 0$

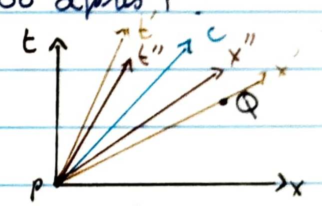
Graphiquement, pour $\mathcal{O}'$, $\Delta x_{PQ} = 0$



② Si Q $\in$ ailleurs absolu de P, alors :

→ Q se produit tjs ailleurs que P

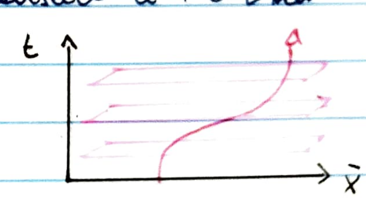
→ $\exists\, \mathcal{O}'$ tq Q se produit avant, pendant ou après P.



Causalité :

→ Les cônes de lumière donne une structure causale à l'e-t très différente de celle de Newton.

↳ Chez Newton, la seule contrainte est l'interdiction de remonter le temps. La notion de simultanéitée est non-ambigue.

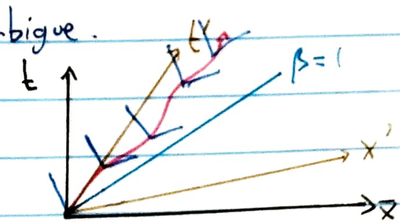


↳ En RR, c'est très différent.

1) La simultaneité est relative :

→ x : surface de simultanéité pour $\mathcal{O}$

→ x' : surface de simultanéité pour $\mathcal{O}'$



2) Les trajectoires sont contraintes par les cônes de lumière.

2.6.2 Le temps propre :

DEF | Le temps propre séparant 2 événements séparés par un intervalle de genre temps ($\Delta s^2 < 0$) est défini par :

$$\Delta \tau^2 = -\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x_i \Delta x^i$$

C'est le temps mesuré par un $\mathcal{O}'$ pour lequel ces 2 événements se produisent au même endroit. En effet, pour $\mathcal{O}'$:

$$\Delta x'^i = 0 \Rightarrow \Delta s^2 = -\Delta x'^2 = -\Delta \tau^2$$

2.6.3 Courbes causales :

→ Rappel : une courbe est $\mathcal{C} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}^{1,3} : \lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$, et son champ vecteur tangent est $v^\alpha = dx^\alpha / d\lambda$.

DEF | Une courbe est dite de genre (temps / lumière / espace) si v^α est partout de genre (temps / lum. / espace).

DEF | Une courbe causale est une courbe dont le vecteur tangent v^α

1) est partout de genre temps ou lumière ($\beta \leq 1$)
2) est partout orienté vers le futur ($dx^0/d\lambda > 0$)

Les courbes causales décrivent les trajectoires des particules / signaux transportant de l'information.

2.6.4 Longueur Minkowskienne d'une courbe causale.

DEF | La longueur d'une courbe causale est appelée temps propre :

$$\tau = \int_{\mathcal{C}} d\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{dx^0}{d\lambda}^2 - \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}^2}\, d\lambda$$

Le temps propre est égal au temps indiqué par une horloge se déplaçant le long de la courbe

→ $\neq$ $\mathcal{C}$ causales joignant $P \to Q$ ont $\neq$ longueurs

→ Le temps propre joignant 2 événements est maximisé pour la ligne droite, et vaut $\Delta\tau^2 = -\Delta s^2$

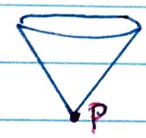
2.6.5 Horizons d'événements :

DEF Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}^{1,3}$ un ensemble d'évènement de Minkowski.
→ Le futur chronologique $I^+(\mathcal{S})$ est l'ensemble de tout les points de $\mathcal{M}^{1,3}$ qui peuvent être joints à un point de $\mathcal{S}$ par une courbe de genre temps orienté vers le futur
→ Le futur causal $J^+(\mathcal{S})$ est l'union de $\mathcal{S}$ avec tout les points de $\mathcal{M}^{1,3}$ qui peuvent être joint à un point de $\mathcal{S}$ par une courbe causale
→ On définit de manière analogue $I^-(\mathcal{S})$ et $J^-(\mathcal{S})$

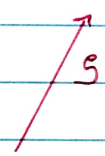
→ On a $I^+(\mathcal{S}) \subset J^+(\mathcal{S})$

Exemples :

1. $\mathcal{S} = \{p\}$: $I^+(\{p\}) = C_p^+ \setminus \partial C_p^+$
$J^+(\{p\}) = C_p^+$



2. Trajectoire d'un observateur inertiel : $(\forall t)$
$I^+(\mathcal{S}) = J^+(\mathcal{S}) = \mathcal{M}^{1,3}$



3. trajectoire d'un observateur accéléré :

→ Préliminaires :
→ Soit $x^\alpha(\lambda)$ une courbe de genre temps : $\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = -\alpha^2(\lambda) < 0$

↳ On peut tjs choisir λ tel que $\| dx^\alpha / d\lambda \| = -1$
En effet, si on reparametrise $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$, on a $\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\mu} \frac{dx^\beta}{d\mu} \cdot \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = -\alpha^2$
Il suffit alors de prendre $\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = \alpha^2$

Dans ce cas, $d\mu^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -ds^2 = d\tau^2$
↳ En paramétrisant la courbe avec le temps propre, le vecteur tangent à la courbe est normalisé à -1.

DEF On définit la quadrivitesse d'une courbe selon $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}$
avec $u^\alpha u_\alpha = -1$
On définit la quadriaccélération selon $a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau}$

→ Etudions la trajectoire d'un observateur à accélération constante :
$a^0 \neq 0$, $a^1 \neq 0$ (et $a^2 = a^3 = 0$). On décrit le mouvement dans un réf. inertiel tel que $u^2 = u^3 = 0$,

→ Les eqs du mvt sont : $\begin{cases} \frac{dx^0}{d\tau} = u^0 \; ; \; \frac{dx^1}{d\tau} = u^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{du^0}{d\tau} = a^0 \; ; \; \frac{du^1}{d\tau} = a^1 \end{cases}$

avec $u^\alpha . u_\alpha = -1 = -(u^0)^2 + (u^1)^2$ et $a_\alpha a^\alpha = a^2 = cste \overset{(*)}{=} -(a^0)^2 + (a^1)^2$

↳ $\frac{d}{d\tau}(u^\alpha u_\alpha) = 2 a^\alpha u_\alpha = 0 \Rightarrow a^\alpha u_\alpha = 0 \overset{(*)}{=} -a^0 u^0 + a^1 u^1$

Ainsi, $a^0 \overset{(*)}{=} \frac{a^1 u^1}{u^0}$

↳ $(a^1)^2 = \{(u^0)^2 - (u^1)^2\}(a^1)^2 = (u^0 a^1)^2 - (u^1 a^1)^2 \overset{(*)}{=} (u^0 a^1)^2 - (a^0 u^0)^2$

$= (u^0)^2 \{(a^1)^2 - (a^0)^2\} \overset{(*)}{=} (u^0)^2 a^2 \Rightarrow \frac{a^1}{u^0} = \pm a$ (choix de signe)

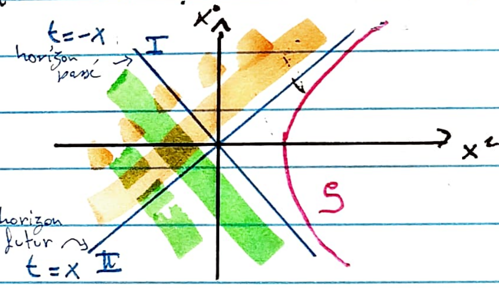
↳ $a^0 \overset{(*)}{=} a . u^1$

↳ On obtient : $\begin{cases} \frac{du^0}{d\tau} = a . u^1 \; ; \; \frac{du^1}{d\tau} = a . u^0 \end{cases}$

En forme matricielle : $\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = ch\, a\tau \; \cancel{+cste} \\ u^1 = sh\, a\tau \; \cancel{+cste} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^0 = sh\, a\tau / a \\ x^1 = ch\, a\tau / a \end{cases}$

La courbe est une hyperbole :
$(x^0)^2 + (x^1)^2 = 1/a^2$



: impossible d'être influencé $= I^+(S)$

: impossible à atteindre $= I^-(S) = J^-(S)$

→ L'observateur accéléré possède des horizons des événements